ASOCIACIÓN DE CABILDOS NASA ÇXHÃCXHA

RESOLUCIÓN 002 DE ENERO DE 1996
NIT: 817000260-2
CONSEJO DE EDUCACIÓN

ASOCIACIÓN DE CABILDOS NASA ÇXHÂÇXHA

CIIIT
Centro Indígena de Investigaciones Interculturales de Tierradentro

LÍNEAS DE FORMACIÓN DOCENTE

Didáctica de la Matemática
Isawejxatewe'sx pü'çxheçvxitna

Módulo 2

por:
Leiby Cuetocue Pistala
Hugo Castro Ramos
Dummer Orozco Muñoz

EN EL MARCO DEL CONTRATO
325-2017 FIRMADO CON
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA
DEL DEPARTAMENTO DEL CAUCA

LÍNEAS DE FORMACIÓN DOCENTE

Didáctica de la Matemática
Isawejxatewe'sx pü'çxheçvxitna

ASOCIACIÓN DE CABILDOS NASA ÇXHÂÇXHA - CONSEJO DE EDUCACIÓN
EQUIPO DE APOYO PEDAGÓGICO

LÍNEA DE FORMACIÓN

Didáctica de la matemática

ISAWEJXATEWE´SX PÜÇXHEÇVXITNA

MÓDULO 2

Resguardo de:

KWETAHD KIWE

10,11 Y 12 de Junio de 2017


Dummer Orozco Muñoz
Leiby Cuetocue Pistala
(Lic.)Edier Henao Henao

SEMINARIO-TALLER DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

PROPUESTA GENERAL

Se presenta una propuesta general de contenidos y económica, para la segunda jornada de Talleres de Didáctica de las Matemáticas a realizarse en Cohetando Cauca del 10 al 12 de julio. El proceso de los talleres inició en el mes de abril del presente año con un encuentro de 2 días y, para este nuevo encuentro, lo que se pretende es dar continuidad a las actividades y propuestas que quedaron pendientes en los talleres anteriores. En particular, se enuncia el objetivo, la justificación y los contenidos que serían trabajados en el encuentro de 3 días. En la parte final se presenta la propuesta económica.

B. Objetivo

Profundizar con los maestros y maestras en opciones teórico-prácticas sugeridas desde las teorías de la Didáctica de las Matemáticas, que pudieran ser útiles para repensar su acción educativa, partiendo de sus conocimientos, experiencias y contexto.

C. Justificación

El seminario-taller de Didáctica de las Matemáticas propone el abordaje de opciones teórico-prácticas en el marco de la Didáctica de las Matemáticas bajo dos condiciones; por un lado, la necesidad de actualizar a los y las participantes en relación con algunos avances de la didáctica específica, que son de interés para el profesorado en todos los niveles de la educación y, por otro lado, la importancia de repensar la propia práctica educativa en aras de una permanente cualificación.

Algunas ideas básicas para provocar la reflexión son las siguientes:

- las matemáticas han sido construidas históricamente a partir de una gran diversidad de prácticas sociales, por lo cual su enseñanza y aprendizaje deberían estar en consonancia con dichas prácticas.
- las matemáticas son, junto con la lengua, un “instrumento” de conocimiento, comunicación, interacción y resolución de problemas y por ello son objeto de enseñanza en todas las sociedades.
- las matemáticas como parte de un proceso formativo, podrían y deberían desarrollar en los y las participantes capacidades y competencias para transformar su propia realidad y la de su entorno; tal desarrollo sólo es posible con el dominio tanto de los conocimientos matemáticos implicados como de la didáctica de los mismos.

En particular, se reflexionará con los participantes en torno a cuestiones didácticas fundamentales que tienen que ver con la búsqueda de respuesta a la preguntas ¿para qué enseñar las matemáticas?, ¿qué contenidos enseñar de las mismas? y ¿cómo hacerlo de una manera eficaz, pertinente y flexible?

Nº	Pasos/contenidos	Materiales	Tiempo
1	**Plenario:** Introducción • Saludo • Objetivos • Perfil de participantes (nuevos y asistentes por segunda vez)	• Listado • Power point	8:00-8:45
2	**Plenario:** Recapitulación encuentro anterior ✓ Devolución evaluación de talleres anteriores (tabulación) ✓ Devolución actividad de Diagnóstico inicial realizado en encuentro de abril: Concepciones y conocimientos didácticos. ✓ Conceptos y actividades abordadas en abril	• Tabulación Evaluación • Tabulación actividad de Diagnóstico realizada en encuentro anterior • Notas y plan taller anterior	8:45-10:00
Descanso			10:00-10:30
	Trabajo en equipos y socialización ✓ Avances en compromisos (comentarios por parte de los maestros-subgrupos) ➢ Ubicar un problema social (ambiental) ➢ Definir contenidos de las áreas/cultura para explicar el problema ➢ Nivel de los estudiantes ➢ Planear 3 clases (contenidos, objetivos, materiales, productos y evaluación) ➢ Producto final	• Notas de los maestros	10:30-12:30
	Almuerzo		12:30-1:30

3	**Plenario:** Introducción: La historia como recurso para mediar la apropiación de conocimientos, la motivación de los aprendices y la valoración de las matemáticas **Trabajo en grupo** ✓ Lectura de documento 1 y apuntes	• Documento 1	1:30-3:00

- **Día 2. Julio 11**

Nº	Pasos/contenidos	Materiales	Tiempo
1	**Continuación.** **Plenario.** La historia como recurso para mediar la apropiación de conocimientos, la motivación de los aprendices y la valoración de las matemáticas ✓ Taller primaria (Gauss y otro) ✓ Taller bachillerato (Distancia inaccesibles) ✓ Video	• Notas • Video • Transportadores • Cuerda • Pitillos	8:00 – 12:30
Almuerzo			12:30-1:30
2	**Plenario.** Pruebas saber y concurso docente ✓ Fundamentación: tipos de preguntas, intencionalidad, algunos resultados ✓ Taller de aplicación (simulacro)	• Power point • Copia de simulacro • Hoja de respuestas	1:30-3:00
7	**Evaluación 1.** Oral (intervención de 3 o 4 maestros) Avances, observaciones, etc.	• Diario de campo	3:00-3:15

- **Día 3. Julio 12**

Nº	Pasos/contenidos	Materiales	Tiempo
1	**Plenario.** Etnomatemática ✓ Marco conceptual y experiencias ✓ **Trabajo en equipos.** Experiencias concretas y definiciones. ✓ Lectura de documentos	• Notas • Documento 2 • Documento 3	8:00 – 10:00
Descanso			10:00-10:30
2	**Matemática Nasa** ✓ Avances en investigaciones ✓ Diferentes actividades estudiadas (contar, medir, diseñar, explicar, jugar, etc.) ✓ Posibles nuevos aportes desde este grupo de maestros/as	• Notas • Libro matemática Nasa • Power Point	10:30-12:30
Almuerzo			12:30-1:30
2	**Plenario.** Definición de temas/problemas para experiencias de aula. Contenidos según intereses de los maestros ✓ Perspectivas ✓ Compromisos ✓ ¿Próximos encuentros?	• Notas de los maestros	1:30-3:00
7	**Evaluación 2.** Se evalúan, en el formato propuesto, los tres días de trabajo	• Diario de campo • Formato de evaluación	3:00-3:15

E. Metodología

- Exposición (participativa)
- Trabajo en equipos
- 2 talleres prácticos orientados
- Trabajo independiente (propuesta de profundización para próximo encuentro)

La historia como recurso para mediar la apropiación de conocimientos, la motivación de los aprendices y la valoración de las matemáticas

Edier Yorley Henao H.
edierhenao@hotmail.com

Resumen

En el contexto de la Educación Matemática, actualmente, tiende a ser generalizada, por lo menos en teoría, la idea y toma de conciencia sobre la función didáctica que puede desempeñar la historia de las matemáticas en la educación básica y media; sin embargo, la articulación de la misma como práctica en las aulas de clase no es una constante. En este artículo, tomando como referencia la perspectiva histórico cultural de la adquisición del conocimiento en general (Vigotsky, 1993, 1995) y el matemático en particular (Radford, 2006) y algunos autores que han defendido esa función didáctica, asumimos el recurso de la historia de las matemáticas como una mediación complementaria entre otras, que contribuye con la justificación, motivación y apropiación de los objetos matemáticos. Como caso particular profundizamos algunas ideas en relación con las operaciones matemáticas básicas desde una perspectiva histórica, creativa y recreativa.

Palabras clave: historia de las matemáticas, mediación, operaciones básicas.

1. *Introducción*[1]

A pesar de la diversidad de discusiones, enfoques y herramientas (didáctico/tecnológicas) con que se cuenta actualmente en el ámbito de la educación matemática, entendida ésta como “todo proceso que se orienta al desarrollo, fundamentación, investigación, comprensión, interpretación y descripción de fenómenos referentes a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en cualquier nivel de la escolaridad... (Henao, 2010, p.2), los resultados aún no son totalmente satisfactorios en diversas experiencias, salvo algunas excepciones. Podríamos decir que 20 años después, aún se mantiene vigente la situación analizada por Bishop (1991-1999) sobre los efectos que produce la educación matemática en los jóvenes, particularmente, en los que experimentan el fracaso en relación con el conocimiento matemático.

> Siguen creyendo que las matemáticas son importantes, pero también que son difíciles –imposibles para muchos-, misteriosas, sin sentido y aburridas. No <<tratan>> de nada y provocan sentimientos de temor, de falta de confianza y, sin duda, de odio. Para algunos, llegan a provocar sentimientos de opresión y de estar bajo el dominio de alguien, no se sabe quién. (p.18).

[1] Este artículo fue producido en el marco del Curso Descubriendo la historia del número, la aritmética y el álgebra orientado por la profesora Ana Celi Tamayo y teniendo en cuenta también aportes del Curso Matemáticas Creativas orientado por el profesor José Alberto Rúa. Ambos profesores adscritos al Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Medellín. A su vez los cursos citados hicieron parte de la programación de la Ruta de Formación de Docentes del Municipio de Medellín (2011).

En nuestro país, estas consideraciones de alguna manera son constatadas, entre otras cosas, por los resultados insatisfactorios de los estudiantes en las pruebas nacionales e internacionales que consideran las capacidades matemáticas de los mismos (Cfr. resultados pruebas PISA, SABER, ICFES, entre otras); por las dificultades que presentan algunos estudiantes en carreras universitarias que implican una profundización de las matemáticas y por personas que aún sin una necesidad explícita de profundizar las matemáticas, experimentan dificultades para actuar matemáticamente en la cotidianidad[2]. En este sentido, más allá de las evaluaciones nacionales e internacionales, algunas de las cuales habría que discutir y otras que gradualmente han ido cambiando, también el desarrollo incipiente de las capacidades matemáticas necesarias para interactuar socialmente en contextos diversos debe ser revisado y tal vez con mayor detalle. De hecho, el fin de la EM no es que los estudiantes aprendan matemáticas para responder a un sistema de evaluación, algunas veces ajeno a su realidad sino que, y en primer lugar, deben desarrollar capacidades y empoderarse para intervenir matemáticamente sobre su realidad y transformarla, transformación que, entre otras cosas, implica aprender a vivir con otros. En otras palabras, "aprender matemáticas no es simplemente aprender a *hacer* matemáticas (resolver problemas) sino aprender a *ser* en matemáticas. La diferencia entre ser y hacer es inmensa…" (Radford, 2006, p.114).

En esa dinámica de aprender a *ser,* las dimensiones ética, estética, política, histórica y cultural de las matemáticas son determinantes en la formación de los educandos/as como ciudadanos activos. Dejar de lado esas dimensiones en las clases de matemáticas contribuye a aumentar las decepciones señaladas y el sentimiento en los aprendices de que las matemáticas son un conocimiento estático, ya acabado, con referentes sociales limitados y a veces hasta inútil. En ese contexto, la historia de las matemáticas juega un rol importante para explicitar y orientar a los aprendices en relación con las dimensiones citadas, a la vez que puede constituirse en una fuente de mediaciones significativas en la acción educativa del maestro dándole nuevas alternativas para la contextualización y justificación de los contenidos abordados y para la motivar e interesar a los aprendices en relación con las matemáticas. A continuación profundizamos en estas consideraciones.

2. *La historia de las matemáticas como fuente de mediaciones didácticas.*

En términos generales, las teorías histórico-culturales postulan que el conocimiento se adquiere en una perspectiva social en oposición a una adquisición mentalista individualizada. La orientación hacia lo social en la investigación en Educación Matemática está inmersa en esas "teorías que conciben la creación de significado, el pensamiento y el razonamiento como productos de una actividad social" (Lerman, 2000a, p. 23, por Font, 2002, p.130). Así, el aprendizaje matemático podría ser entendido como "adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos espistémico-culturales históricamente formados" (Radford, 2006, p.105). Siguiendo las ideas del autor, diremos que el pensamiento, y por tanto el aprendizaje, son reflexiones mediatizadas del mundo. Ya Vigotsky, hace casi un siglo, abordó en detalle el papel que juegan ciertos

[2] En "¿Iniciación a los números o educación matemática? (Henao, 2010) nos referimos a las dificultades vividas por adultos subescolarizados.

"instrumentos", especialmente el lenguaje, en el desarrollo del pensamiento. Para la educación matemática esta perspectiva toma cada vez mayor fuerza:

> En otras aproximaciones teóricas que han venido cobrando mayor vigencia en dominios como la antropología, la sociología, la epistemología, dominios que han tenido influencia en la Educación Matemática estos últimos años, el sujeto no es pensado en relación directa con el objeto de conocimiento. Si bien es cierto que el pensamiento es siempre pensamiento acerca de algún objeto - lo que servía a Kant para recordarnos que el pensamiento sin contenidos es imposible- la relación entre sujeto y objeto se concibe como relación *mediada.* (Radford, 2000, p.7)

Entendiendo pues que el conocimiento matemático es una construcción histórica y a la vez su adquisición es mediada por ciertos "artefactos", acudimos a la historia de las matemáticas como proveedora de algunos de ellos; es decir, en la historia encontramos lenguajes, problemas particulares, formas de proceder y resolver, juegos, paradojas, hechos, materiales "didácticos[3]" y personajes, entre otros, que deberían ser articulados en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Se trata de aportes determinantes en la adquisición de formas de reflexión matemática que ha construido la humanidad, de maneras de conocer, y enfrentar ciertos tipos de problemas, ayudando asimismo a que los educandos/as tomen conciencia de la humanidad de las matemáticas, de que precisamente evolucionaron a partir de dificultades y errores que con esfuerzo fueron superados. Pensada de esa manera, la historia también contribuye con la toma de conciencia del origen multicultural del conocimiento matemático y de sus relaciones con la ciencia y la tecnología, con el arte (pintura, música, arquitectura…), la economía, e incluso con la política, la religión y las cosmovisiones.

La historia de las matemáticas emerge, entonces, como recurso para darle sentido a los contenidos enseñados, como fuente de nuevos significados y formas de *ser y hacer* con los objetos matemáticos, en oposición a la consideración de un sólo significado fijo y estandarizado, a una sola manera de hacer, la moderna y tradicional, la última versión hasta el momento, la misma que en algún momento hará parte de la historia y servirá también como referencia a otras generaciones; es lo que sugiere la dinámica evolutiva del conocimiento matemático. Los conceptos, teorías, procedimientos matemáticos en general y los que son abordados en la escuela en particular, son, indefectiblemente, parte y resultado de una construcción histórica siempre en movimiento dialéctico. En este punto, nos distanciamos de las ideas platonistas e idealistas que asumen los objetos matemáticos independientes del tiempo y la cultura. Los conocimientos matemáticos están arraigados en la historia, en lo social y por tanto en las culturas; en éstas surgen y son recreados; incluso, los más abstractos, de alguna manera tienen sus referentes sociales. Por ejemplo, las nociones primarias de punto, recta, plano, que matemáticamente son abstracciones, tienen sus referentes y concreciones en las sociedades primitivas y la historia de alguna manera da cuenta de ello.

[3] Se tornan didácticos en la medida en la medida en que, intencionalmente, se asumen como mediadores para la enseñanza-aprendizaje.

> La historia de la matemática permite conocer la cuestiones que dieron lugar a los diversos conceptos, la instituciones e ideas de donde surgieron, el origen de los términos, lenguaje y notaciones singulares en que se expresaban, las dificultades que involucraban, los problemas que resolvían, el ámbito en que se aplicaban , los métodos y técnicas que desarrollaban, cómo fraguaban definiciones y teoremas y demostraciones, la ilación entre ellos para forjar teorías, los fenómenos físicos o sociales que explicaban, el marco espacial y temporal en que aparecían, cómo fueron evolucionando hasta su estado actual, con qué temas culturales se vinculaban, las necesidades cotidianas que solventaban. (González, 2004, p.18)

No se trata, pues, de un material fijo y acabado sino de objetos dinámicos, en evolución. En el caso que vamos a profundizar, las operaciones básicas en su versión occidental y utilizadas en casi todo el mundo, se trata de conceptos que evolucionaron especialmente en sus procedimientos y formas de representación; conceptos (adición, sustracción, multiplicación, división) que funden sus primeros sentidos en los principios de la humanidad y se fueron desarrollando en culturas como la Babilónica y a partir de ellas trasmitidos y mejorados en otras culturas y épocas hasta nuestros días. En esa medida, los conceptos, ideas y procedimientos matemáticos han emergido históricamente como producto de la "práctica social" de la humanidad; práctica que crea la necesidad de contar, medir, orientar, calcular, etc.; pero también una práctica que estimula el deseo de conocer y a través de éste la curiosidad y la creatividad que caracteriza al ser humano.

Si consideramos que el aprendizaje consiste también en *"…dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura. (y que)* La adquisición del saber es un proceso de elaboración activa de significados. (Radford, 2006, p.113); entonces se justifica la necesidad de acudir a la historia para ubicar momentos concretos, personajes y sus contextos, ideas y procedimientos que dotan de sentido los objetos matemáticos. No se trata de una orientación antojada, sino de una necesidad latente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; más, si consideramos que muchas veces los contenidos, en principio, no tienen sentido para los aprendices y en algunos casos, como ya indicábamos en la perspectiva de Bishop, no se logra ese objetivo en la escuela.

Como otro valor de la articulación de la historia de las matemáticas en la acción educativa se cuenta la sensibilización y comprensión que puede logar el educador en relación con los obstáculos epistemológicos, en la perspectiva de Bachelard (2004), que se presentan en el aprendizaje de algunos conceptos matemáticos. La historia da cuenta de obstáculos en la génesis del conocimiento matemático que de alguna manera se repiten, con los respectivos matices, en la escuela y, por tanto, es la historia la que puede dar pautas y favorecer la reflexión para la superación de dichos obstáculos.

Finalmente, no podemos dejar de enfatizar, aunque de alguna manera ya nos hemos referido al asunto, que en la historia se encuentran experiencias creativas y recreativas que pueden ser articuladas en el aula de clase, problemas curiosos que fueron resueltos ingeniosamente por "pequeños grandes matemáticos" como es el caso de Gauss, Pascal, Galois, Clairaut, Bertrand, Abel entre otros que, de manera precoz, dieron muestras de un futuro matemático prometedor. Con certeza, y la experiencia nos ha mostrado, que acercamientos a ese tipo de personajes despiertan mucho interés en los educandos/as.

> La matemática recreativa se nutre en buena parte de problemas que han tenido cierto interés a lo largo de la Historia de la Matemática. Ésta es, pues, un manantial de problemas curiosos que pueden ser tratados… (González, p.25) [4]

En una perspectiva más formal la historia de las matemáticas posibilita también establecer relaciones más finas entre el progreso científico y tecnológico de la humanidad y el conocimiento matemático, en procura de una orientación vocacional de los aprendices. Con esa orientación se muestra que las matemáticas han tenido mucho que ver con esos desarrollos y que a la vez son un instrumento de conocimiento para acceder a otros campos del saber; instrumento que ha sido fundamental y determinante en el desarrollo de las sociedades letradas.

3. *La historia de las matemáticas en el aula de clase*

Aunque ya se han hecho algunas anotaciones en el apartado anterior, para no quedarnos sin una mayor concreción de las mismas en relación con la práctica, retomamos algunas ideas orientadas a dar respuesta a "cómo" articular la historia de las matemáticas en el aula de clase, respuesta que también depende de la creatividad del educador y las posibilidades que ofrece el contenido específico abordado en determinado momento. A este propósito, Fauvel y Barrow (2000) presentan una lista de doce formas bajo las cuales puede usarse la historia de las matemáticas en el aula de clase, las cuales parafraseamos:

- Abordar con los aprendices citas anecdóticas de matemáticos del pasado.
- Hacer introducciones históricas en relación con los conceptos que son nuevos para los educandos/as.
- Animar a los estudiantes a comprender el contexto histórico en el cual surgen problemas que fueron resueltos a través de los conceptos que están aprendiendo.
- Aprovechar las habilidades específicas de los estudiantes para engancharlos en el aprendizaje de la historia (uso de la biblioteca, escritura de ensayos).

[4] Para profundizar otras ideas sobre la historia de las matemáticas y su función didáctica remitimos a la lectura del artículo "La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza" de González (2004); disponible en la web.

- Animar a los estudiantes a desarrollar la comprensión crítica de lo que están aprendiendo.
- Usar el computador con el desafío de utilizar y evaluar críticamente los resultados de búsqueda.
- Proponer tareas extra clase a partir de textos matemáticos del pasado.
- Proponer ejercicios en el aula con textos matemáticos del pasado.
- Promover dramatizaciones que reflejan la interacción matemática.
- Realizar proyectos acerca de la actividad matemática en el pasado.
- Diseñar el enfoque pedagógico de un tema en sintonía con su desarrollo histórico.
- Dar o recomendar un libro al estudiante para el estudio individual.

Los autores citados, indican que la lista no es exhaustiva y exhortan al lector a profundizar en cada uno de los ítems propuestos y a pensar otras maneras de usar la historia en la escuela, frente a lo que proponemos actividades como las siguientes:

- Llevar al aula de clase videos de productores especializados en historia (History Chanel, Discovery Chanel, etc) y otros disponibles en internet que dan cuenta de momentos concretos de aparición y desarrollo de contenidos específicos.
- Utilizar en las clases "instrumentos tecnológicos" de la antigüedad usados para calcular (astrolabio, ábacos…), para jugar, para aprender.
- Introducir y/o profundizar algunos conceptos a partir de juegos sugeridos por la historia de las matemáticas (cubos mágicos, tipos de números, dados, cartas, torres de Hanoi, Cubos de Soma y un largo etcétera)[5].
- Abordar diferentes procedimientos y lenguajes históricos para resolver una misma operación o situación. Por ejemplo el caso del algebra (retórica, sincopada y simbólica) analizando los beneficios y dificultades en uno u otro caso. Otro ejemplo es el de las diferentes formas de resolver las operaciones que abordamos en el apartado siguiente.
- Organizar un periódico mural en el que, por ejemplo, cada mes se expongan las ideas de un período de la matemática y/o de un matemático en particular.

En Silva (2003)[6] encontramos otras ideas para materializar el "uso" de la historia de la matemática en el aula de clase, algunas de ellas se citan a continuación:

- "El profesor debe estimular al alumno (…) a investigar sobre los matemáticos y las matemáticas, buscando aspectos curiosos, dramáticos o románticos de sus vidas, antes de entrar en el conocimiento producido por ellos. Por tanto, se sugiere usar diccionarios, enciclopedias, libros e internet para las investigaciones.
- Trabajar con la etimología de las palabras puede ser un ejercicio estimulante e interesante para los alumnos (…)

[5] Miguel de Guzman (1984) en su artículo "Juegos matemáticos en la enseñanza" desarrolla desde una perpectiva histórica la aplicación e importancia que pueden tener los juegos (históricos) en la enseñanza de las matemáticas.
[6] Traducciones mías.

- Presentar a los alumnos fábulas cortas, proverbios, versos matemáticos, chistes, en fin un poco de folclor de la Matemática para estimular la imaginación de los estudiantes.” (p.10).

4. *Las operaciones básicas desde una perspectiva histórica*

En este apartado no pretendemos una revisión histórica exhaustiva de las operaciones matemáticas básicas, de hecho, para ese propósito, sería necesaria toda una empresa investigativa. Sin embargo, intentaremos algunos aportes que podrían ser considerados para la enseñanza de esas operaciones en el ámbito de la educación básica primaria, en nuestro caso, con jóvenes y adultos de sectores populares.

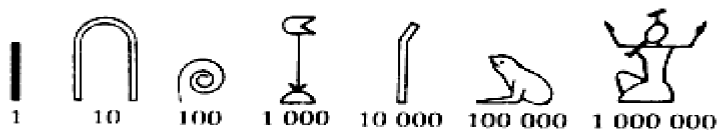
Histórica y actualmente, la numeración y las operaciones matemáticas de adición, sustracción, multiplicación y división han jugado un rol determinante como instrumento de comunicación y mediación, especialmente en actividades de carácter económico-comercial. No obstante, desde un punto de vista político y organizativo también han tenido aplicaciones importantes, como es el caso de los cálculos de población (censos como el que cita la Biblia, que motivó el desplazamiento de José y María hacia Belén) y la distribución de tierras que reporta la historia en las riveras del Nilo, en el antiguo Egipto; sólo por mencionar algunos casos “recientes”. Para los pitagóricos, estas operaciones, aparte de su valor práctico, cobraron un sentido religioso o trascendental, como lo fue la mayor parte de la matemática para ellos. Por supuesto, actualmente el campo de aplicación de las operaciones matemáticas básicas está bastante diversificado, y aunque las maneras de operar hayan tomado otro rumbo gracias a la tecnología (calculadoras, cajas registradoras y computadores), las mismas siguen siendo la base del andamiaje matemático de todo ciudadano que se dice letrado, e incluso en su forma oral, de muchos iletrados.

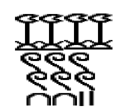
> Cuatro son las operaciones de la Aritmética primaria: adición, sustracción, multiplicación y división. Curiosamente, otras colecciones familiares totalizan cuatro elementos:
>
> - Cuatro puntos cardinales: Norte, Sur, Este, Oeste.
> - Cuatro estaciones del año: primavera, verano, otoño, invierno
> - Cuatro naipes de la baraja: espada, copas, oro y bastos.
> - Cuatro fases de la luna: nueva, creciente, llena y menguante
> - Cuatro grandes profetas del Antiguo Testamento: Isaías, Esequiel, Jeremías y Daniel.
> - Cuatro periodos de la historia humana: antiguo, medio, moderno y contemporáneo.
> - Cuatro cuadrantes del círculo.
> - Cuatro versos de una trova.
>
> El número cuatro, para los pitagóricos, era el famoso número generador de los dioses y de los hombres. Así, las cuatro operaciones elementales pueden ser vistas como míticas y ejemplares en el cuadro general de las operaciones matemáticas. (Op cit. p.15)

4.1 *Adición y sustracción*

La suma y la resta, junto con la capacidad de contar, se asumen como las operaciones matemáticas más elementales y a partir de las cuales se va construyendo todo el edificio matemático. Sin embargo, a pesar de la “facilidad” que sugieren estas operaciones actualmente, la consolidación de sus algoritmos y signos fue una tarea difícil. La humanidad tuvo que lidiar con las dificultades que acarreaba la ausencia de un sistema de numeración como se lo concibe actualmente, sin manera de representar el cero por ejemplo y lidiando con representaciones que en muchos casos dependían más del contexto en que eran usadas que de un significado independiente. Algunos vestigios de numeraciones antiguas se mantienen hasta nuestros días como es el caso de la base 60, de los babilonios, para las horas, minutos y segundos. Así mismo, la numeración romana, aunque se ha ido perdiendo cada vez más, todavía es usada en algunos casos concretos. Por su parte, la numeración Maya sigue vigente en esa cultura y se enseña en las escuelas debido a que sus ámbitos de uso son variados[7]. Las siguientes son algunas formas para representar las cuentas en culturas antiguas.

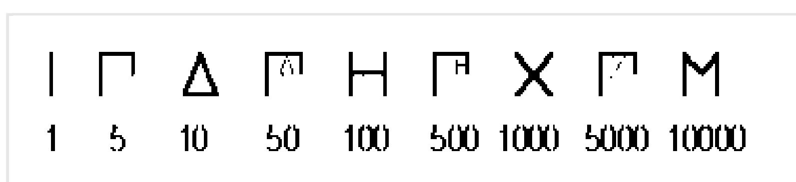
Numeración egipcia





4.622

Numeración griega

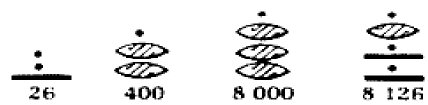


Numeración babilónica

424.000

[7] Ver por ejemplo: Yojkom, D. (2006). Análisis del uso actual del sistema de numeración vigesimal en cinco comunidades q’eqchi’ de Guatemala.

Numeración Maya[8]



A continuación presentamos algunos algoritmos de las operaciones básicas usados en otros tiempos que podrían servir en la conceptualización y para la motivación de los educandos/as.

Es interesante observar las diferentes formas por las que pasó el signo de sustracción y las diversas letras que los matemáticos utilizaron para indicar la diferencia entre dos cantidades.

En la obra de Diofanto, entre las abreviaturas que constituían el lenguaje algebraico de ese autor, se encuentra la letra griega Ø, indicando sustracción. Esta letra era empleada por el famoso geómetra de Alejandría, como señal de operación invertida o truncada.

Para los indios, como se encuentra en la obra de Bhaskara, el signo de sustracción consistía en un simple punto colocado sobre la cifra que constituye el sustraendo. La letra *M*, algunas veces *m*, se usó durante un largo período por los algebristas italianos, para indicar sustracción: Luca Pacioli, además de emplear la letra *m*, colocaba entre los términos de la sustracción, la expresión *DE*, abreviatura de *demptus* .

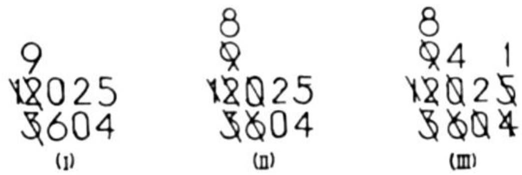
A los alemanes les debemos la introducción del signo - (menos), atribuido a Widman. Piensan algunos autores que el símbolo menos (-), tan extendido y tan simple, corresponde a una forma límite que tendría la letra *m* cuando se escribe rápidamente. Además, Viète, considerado como el fundador del álgebra moderna, escribía el signo = entre dos cantidades, cuando quería indicar la diferencia entre ellas. (op.cit)

Una resta hecha hace más de mil años

En el libro de Malba Tahan, *matemática divertida y curiosa,* encontramos la descripción de la siguiente resta, según el autor, utilizada en el año 830. Obviamente, la operación se realiza con la notación numérica moderna. La resta propuestas es: 12.025 – 3.604.

[8] El sistema de numeración Maya aún tiene vigencia y se enseña en las escuelas de esa Cultura.

“La operación se iniciaba por la izquierda (operación I). Decimos: de 12 restamos 3 y quedan nueve; cancelamos los dígitos considerados y escribimos el resto obtenido encima del minuendo (ver figura).



Continuamos: de 90 restamos 6 y restan 84. La diferencia obtenida (operación II) es escrita sobre el minuendo, y los dígitos que formaban los términos de la sustracción, aparecen cancelados. Finalmente de 8425 restamos 4 y quedan 8421 (operación III) y ésa es la diferencia entre los dos números dados. Así era como Mohamed Ben Musa Alkarismí, geómetra árabe y uno de los sabios más notables del siglo IX, restaba dos números enteros1. ¡Qué cosa tan complicada! (Tahan, M: Sección 2, numeral 1)

4.2 Multiplicación y división

La multiplicación y la división se sitúan, desde un punto de vista pedagógico, en un nivel diferente al de la suma y la resta. La suma y la resta son más accesibles a la comprensión porque son más “concretas”. Según el orden dado para su enseñanza, la división es la cuarta de las operaciones básicas y se considera como la más compleja de ellas. Los conceptos de producto y división son pues, más elaborados y exigen ciertas nociones numéricas ya apropiadas, incluidas la suma y la resta; en ese sentido el aprendizaje de unos y otros no se da al mismo tiempo. En un primer momento se abordarían, de manera explícita, algunos conceptos del campo conceptual[9] aditivo y, posteriormente, los del multiplicativo, aunque tempranamente el sistema de numeración ya refiere una estructura multiplicativa. Veamos pues algunos algoritmos históricos sobre la multiplicación y la división que han sido adaptados al sistema de numeración decimal.

Una manera de multiplicar en Babilonia

Algunas fuentes, señalan que los babilonios usaban, obviamente en su lenguaje y escritura, fórmulas como las siguientes para realizar multiplicaciones, fórmulas que a su vez remitían al uso de tablas de cuadrados que habían sido previamente diseñadas.

[9] La noción de campo conceptual proviene de Vergnaud (1990). “Consideremos en primer lugar un campo conceptual como un conjunto de situaciones. Por ejemplo, para el campo conceptual de las estructuras aditivas, el conjunto de situaciones que requiere de una adición, una sustracción o una combinación de dichas operaciones; y para las estructuras multiplicativas, el conjunto de situaciones que requieren una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones”. El mismo autor aclara “El concepto de situación no tiene aquí el sentido de situación didáctica sino más bien el de tarea, la idea es que toda situación compleja se puede analizar como una combinación de tareas de las que es importante conocer la naturaleza y dificultades propias. La dificultad de una tares no es no la suma ni el producto de la dificultad de las diferentes subtareas, pero está claro que el fracaso en una subtarea implica el fracaso global”.

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

En el segundo caso, en el registro numérico actual, para la multiplicación de 12 x 5 tendríamos lo siguiente:

$$(12)(5) = \frac{(12+5)^2}{4} - \frac{(12-5)^2}{4}$$

$$(12)(5) = \frac{(17)^2}{4} - \frac{(7)^2}{4}$$

$$(12)(5) = \frac{289}{4} - \frac{49}{4} = \frac{240}{4} = 60$$

Evidentemente un procedimiento más extenso y complicado que el que usamos actualmente.

La multiplicación rusa

Se trata de una multiplicación que se popularizó entre campesinos rusos y se usó hasta hace relativamente poco tiempo, también se le conoce como método de los campesinos rusos. Aunque no se trata de una multiplicación sintética es sencilla y el procedimiento puede ser adaptado para la división. Para aplicar este método se requiere, especialmente, saber calcular el doble y la mitad de un número y el mismo podría ser usado en una etapa previa al algoritmo formal en la educación de jóvenes y adultos. Aplicaremos el método para multiplicar 13 x 15.

13	**15**	**x**
6	30	
3	60	x
1	120	x

120 + 60 + 15 = 195

13 x 15 = 195

La secuencia de acciones es la siguiente:

1. Se escriben los factores uno en frente del otro.
2. El primer factor se descompone en sus mitades enteras sucesivas, hasta llegar a uno.
3. El segundo factor se duplica sucesivamente, tantas veces como mitades se hayan calculado en el primer factor.
4. Se seleccionan, de la columna de la derecha, los números (sumandos) que tengan asociado en el lado izquierdo un número impar, para el caso (120, 60 y 15) y se efectúa la suma de los mismos cuyo resultado es el producto buscado. Se observa que no usamos como sumando el número 30 porque el número que está a su lado izquierdo es par.

Multiplicación por duplicación (Egipcia)

Se trata de un algoritmo similar al anterior, aunque en este caso los dos factores son duplicados sucesivamente. Veamos la multiplicación 7 x 17:

Veces	***Número que se repite***
1	17
2	34
4	68
8	Detenerse

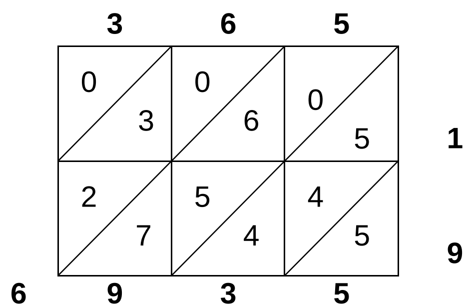
La duplicación se detiene en el momento en que en la columna de la izquierda "el número de veces" supera al multiplicador propuesto, para el caso 7. El producto se obtiene sumando los valores de la columna de la derecha que nos dan 7 veces 17. Es decir 17, 34 y 68 que corresponden respectivamente a "1 vez 17"; "2 veces 17" y "4 veces 17". Así, 14+34+68 = 119.

Encontramos aquí una estrategia sencilla que también sugiere el concepto de multiplicación, por lo menos en lo que a las duplicaciones se refiere. La experiencia nos ha mostrado que los educandos/as se arraigan en la suma reiterada, sin embargo, cuando les creamos la necesidad de la multiplicación haciendo, por ejemplo, el multiplicador cada vez más grande, se empieza a crear un estado de conciencia sobre las posibilidades de la multiplicación. Se trata, pues, de que los/as educandos/as vayan descubriendo poco a poco la eficiencia y economía que ofrece el nuevo algoritmo (estándar), que lo apropien y lo conviertan en herramienta.

Multiplicación por celosía ó multiplicación Árabe

Acudiendo a referencias históricas, una estrategia que podría usarse como motivación, o por lo menos servir de repertorio a los educadores/as, es la multiplicación por celosía.

El algoritmo por celosía consiste en trazar una cuadrícula con tantas columnas como cifras tenga el primer factor y tantas filas como cifras tenga el segundo factor. Cada celda formada se divide diagonalmente de derecha-arriba hacia izquierda-abajo y se llena con el producto de las cifras correspondientes a la fila y la columna que forman dicha celda, la cifra de las unidades se escribe a la derecha y la de las decenas a la izquierda de la diagonal. Después de efectuados los productos parciales, el resultado se obtiene al sumar las diagonales de la cuadrícula de derecha a izquierda.

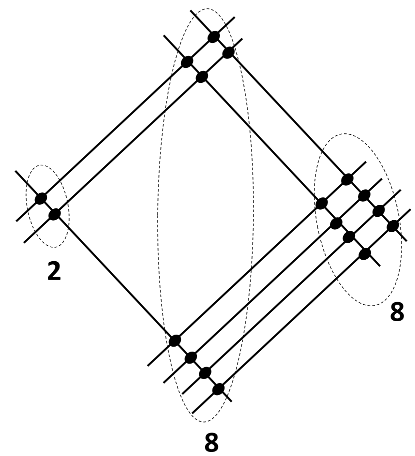


Obtenemos pues como resultado 6.935.

El signo de multiplicar (x) es relativamente moderno. El matemático inglés William Oughtred, lo empleó por primera vez en el libro *Clavis Matematicae* , publicado en 1631. Además, en ese mismo año, Harriot, también para indicar el producto a efectuar, colocaba un punto entre los factores.
En 1637, Descartes ya se limitaba a escribir los factores acercados y de ese modo abreviado indicaba un producto cualquiera. En la obra de Leibniz se encuentra el signo ^ para indicar la multiplicación; este mismo signo, puesto de modo inverso, indicaba la división (Tahan, M).

Multiplicación por puntos

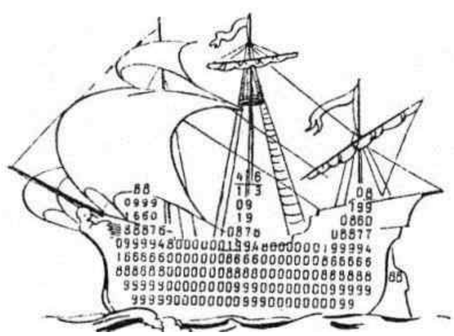
Se propone la multiplicación de 12 x 24 y se invita al lector a explorar este método multiplicando números de diferentes órdenes.



Si consideramos las cifras obtenidas de izquierda hacia de derecha, obtenemos 288 que es el resultado de la multiplicación propuesta.

División por galera

> "Asunto difícil es la división"(dura cosa é la partita) decía un antiguo refrán italiano; acertado refrán si se toman en cuenta los agotadores métodos con que se realizaban entonces: no importa que estos métodos llevaran a veces nombres demasiado festivos: bajo ellos se ocultaba una larguísima serie de complicadas manipulaciones. Así, en el siglo XVI se consideraba el método más corto y cómodo el de división por "lancha o galera". (Perelman ?)



División de números a la manera antigua, por el método de "galera" (En: Perelman ?)

Citamos un ejemplo de división por galera más sencillo y legible propuesto en Maza (1991, p.94). Se trata de la división de 4.386 : 23.

Primer paso	2 3 | 4 3 8 6
Segundo paso	2 0 2 3 | 4 3 8 6 | 1 2 3
Tercer paso	2 0 1 2 3 | 4 3 8 6 | 1 9 2 3 7 2 0
Cuarto paso	2 0 1 2 3 | 4 3 8 6 | 1 9 0 2 3 7 2 0

Este método tiene algunas semejanzas con el algoritmo que utilizamos actualmente para dividir.

División por duplicación

Gabaglia, (Silva 2003, p.45) presenta dos formas de realizar la división basándose en sus referencias del "Papiro de Rhind", se trata de métodos todavía más antiguos:

> Indicando que debe efectuarse una división, se encuentra en el papiro, además del verbo *uab tep y ar, el verbo nas* que significa comúnmente recitar, proclamar, el cual puede ser substituido en el papiro por dividir (…). Las divisiones en el papiro se hacen de dos modos que Eisenloch denominaba el directo y el indirecto. El primero consiste en, dados el dividendo y el divisor, decir después el cociente por medio tablas previamente diseñadas que dan el cociente de 2 por los números impares hasta 99, como también problemas que dan el cociente de los primeros 9 números por 10. La segunda forma consiste en multiplicar el divisor hasta obtener el dividendo; es el modo generalmente usado en el papiro…

Citamos la segunda forma de realizar la división para dos casos concretos. Supongamos que requerimos dividir 288 entre 32, división exacta:

288 dividido entre 32	
1	32
2	64
4	128
8	256

9=

=288

Tenemos entonces que 288 dividido entre 32 es igual a 9. El método se justifica como una operación inversa de la multiplicación. El divisor se repite tantas veces como sea necesario para alcanzar el dividendo. Se puede notar que cuando llegamos a la tercera duplicación el proceso se detiene porque en la siguiente duplicación el dividendo queda superado (16; 512). Este método resultaba más eficiente en cuanto más cercano estaba el divisor del dividendo; en caso contrario, su aplicación resultaba más extensa y engorrosa. También se presentaba un problema con las divisiones inexactas en las que se requería expresar el cociente con cifras decimales, pues en ese caso, en la antigüedad, tanto los egipcios como los mesopotámicos tuvieron que recurrir al cálculo con tablas de fracciones las cuales hacían todavía más compleja la tarea de dividir. Un método posible en la división para algunas culturas fue la aproximación. Bastante tiempo después, con el perfeccionamiento gradual del sistema de numeración decimal, las estrategias de cálculo mejoraron significativamente.

Supongamos ahora que tenemos que realizar una división inexacta como 19 entre 8. Adaptando el método a nuestro sistema de numeración el procedimiento sería el siguiente:

19 dividido entre 8	
1	8
2	16
1/2	4
1/4	2
1/8	1

Tenemos pues que ubicar en la columna de la derecha los números que suman 19; es decir, 16+2+1 y considerar sus correspondientes en la columna de la izquierda, o sea 2+1/4+1/8.

Los ejemplos anteriores, podrían estar al servicio de la motivación e introducción de la división en la escuela, pues como hemos pretendido enfatizar, no se trata de presentar, como por arte de magia, el algoritmo estandarizado actualmente, sino de introducirlo en la medida en que el concepto mismo también se va construyendo. Un análisis importante a realizar con los educandos/as es que estos procedimientos pueden resultar, en algunos casos, bastante engorrosos y extensos y desde ahí justificar aquél que pretendemos institucionalizar.

Las formas " *a/b*" y "$\frac{a}{b}$", indicando la división de *a* por *b* se atribuyen a los árabes; Oughtred, en 1631, colocaba un punto el dividendo y el divisor.
La razón entre las dos cantidades está indicada por el signo ":", que apareció en 1657 en una obra de Oughtred. El signo "÷", según Rouse Bali, resultó de una combinación de los dos signos existentes, "-" y ":". (Taban, M)

Bibliografía

BACHELARD, G. La formación del espíritu científico. México: Siglo XXI, 2004.

BISHOP. A. Enculturación Matemática. La educación matemática desde una perspectiva intercultural. España: Paidós, 1999.

FAUVEL, J; BARROW, J. History as a resource for the mathematics teacher. A position paper for discussion on the OU's PGCE Conference, Dec 1999- Jan 2000. Disponible en :http://mcs.open.ac.uk/puremaths/pmd_department/pmd_barrow-green/History_%20as_%20a_Resource_for_the_Mathematics_Teacher.htm#top. Visitado: julio 19 de 2011.

GONZÁLEZ, P. La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. En: Revista SUMA, 2004. (p.17-28).

GUZMAN, M de. (1984) Juegos matemáticos en la enseñanza. En: Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Santa Cruz de Tenerife, septiembre de 1984. Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas ISAAC NEWTON.

HENAO. E. ¿Iniciación a los números o educación matemática? Medellín: Corporación Educativa CLEBA, 2010.

MAZA, C. Enseñanza de la multiplicación y la división. España: Síntesis, 1991.

MAZA, C. Enseñanza de la suma y la resta. España: Síntesis, 1991

PERELMAN, Yakov: http://www.librosmaravillosos.com/aritmeticarecreativa/capitulo03.html: Acceso, julio de 2011.

RADFORD, L (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. Disponible en: http://laurentian.ca/Laurentian/Home/Departments/School+of+Education+French/Faculty+and+Staff/Luis+Radford/luis_radford_index.htm?Laurentian_Lang=en-CA. Visitado: Mayo de 2011.

RADFORD, L. *Elementos de una teoría cultural de la de la objetivación.* En: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. México: RELIME, 2006. (p.103-129).

SILVA, C. Explorando as operações aritméticas com recursos da historia da matemática. Brasília: Editora PLANO, 2003.

TAHAN. M. Matemática divertida y curiosa. Traducción de Patricio Barros en línea: http://www.librosmaravillosos.com/matematicadivertidaycuriosa/index.html. Visitado julio de 2011.

VERGNAUD, Gérard. **La teoría de los campos conceptuales.** Documento de: *Recherches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10,nº 2, 3, pp. 133-170, 1990*. Disponible en: http://ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf. Acceso: Febrero de 2010.

VICENÇ, F. Una organización de los programas de investigación en didáctica de las matemáticas. En: Revista EMA, 2002, vol. 7, nº 2, 127-170.

VYGOTSKI, L. Problemas del desarrollo de psique: Obras escogidas III. Madrid: Visor, 1995.

VYGOTSKI, L. Problemas de psicología general: Obras escogidas II. Madrid: Visor, 1993.